

Chapitre 3:

Arithmétique des nombres entiers

Diviseur, division euclidienne:

Un entier a est diviseur de l'entier b s'il existe un entier k tel que $b = ka$.

Exemple: 3 est diviseur de 12 puisque $12 = 3 \times 4$.

Critère de divisibilité:

- Par 3: si la somme des chiffres l'est (exemple: 627: la somme des chiffres est: $6+2+7=15$. 15 est divisible par 3).
- Par 4: si les deux derniers chiffres forment un entier qui l'est (exemple: 5732: ses deux derniers chiffres: 32 est divisible par 4).
- Par 5: chiffre qui se termine par 0 ou 5.
- Par 6: s'il est divisible par 2 et par 3. (exemple: 144 car il est pair et $1+4+4=9$ et 9 est divisible par 3).
- Par 9: si la somme des chiffres l'est (exemple: 927, $9+2+7=18$ et 18 est divisible par 9).

• Nombres premiers :

C'est un nombre qui n'admet pas d'autre diviseur que 1 et lui-même.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53...

Propriété : si aucun entier compris entre 2 et \sqrt{m} ne divise m , alors m est premier.

• Exemple 1 : 23

$$\sqrt{23} \approx 4,8$$

Or 23 n'est divisible ni par 2, 3 ou 4 donc 23 est un premier.

Exemples 2 :

$$\textcircled{a} \quad 12 = 2 \times 6$$

$$= 2 \times 2 \times 3$$

$$= 2^2 \times 3$$

∅ nombre premier

$$\textcircled{b} \quad 180 = 2 \times 90$$

$$= 2 \times 2 \times 45$$

$$= 2^2 \times 3 \times 15$$

$$= 2^2 \times 3 \times 3 \times 5$$

$$= 2^2 \times 3^2 \times 5$$

∅ nombre premier

PGCD et PPCM :

Le plus grand diviseur commun :

Exemple 1: PGCD(12, 15)

• Diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6 et 12

• Diviseurs de 15 : 1, 3, 5 et 15

→ diviseurs communs : 1 et 3

$$\text{PGCD}(12, 15) = 3$$

Exemple 2: PGCD(120, 80)

• Diviseurs de 120 :

$$120 = 2 \times 60$$

$$= 2 \times 2 \times 30$$

$$= 2^2 \times 2 \times 15$$

$$= 2^3 \times 5 \times 3$$

• Diviseurs de 80 :

$$80 = 2 \times 40$$

$$= 2 \times 2 \times 20$$

$$= 2^2 \times 2 \times 10$$

$$= 2^3 \times 2 \times 5$$

$$= 2^4 \times 5$$

→ diviseurs communs : $2^3 \times 5$

$$\text{PGCD}(120, 80) = 2^3 \times 5 = 40$$

→ on prend les facteurs communs à la plus petite puissance commune.

Le plus petit multiple commun :

Exemple 1: PPCM(12, 15)

• multiples de 12 : 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96...

• multiples de 15 : 15, 30, 45, 60...

$$\text{PPCM}(12, 15) = 60$$

Example 2: $\text{PPCM}(a, b) \times \text{PGCD}(a, b) = a \times b$

$$\text{PPCM}(120, 80)$$

$$\text{PGCD}(120, 80) = 40 \text{ donc } \text{PPCM}(120, 80) \times 4 = 120 \times 80$$

$$\text{PPCM}(120, 80) = \frac{120 \times 80}{40}$$

$$\text{PPCM}(120, 80) = 240$$